НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.

ЛЕКЦИЯ 5

3 ВИДЫ И ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

3.1 Линейные и нелинейные системы управления

Разделение систем управления на линейные и нелинейные определяется математическими методами, применяемыми при их исследовании.

Таким образом, *по виду применяемого математического аппарата системы управления разделяются на линейные и нелинейные*.

Напомним, что благодаря принципу суперпозиции в математике наиболее развиты линейные модели и методы. На их основе получены общие методы анализа и синтеза. Это передаточные функции и частотные характеристики, аналитическое конструирование регуляторов, модальное управление и другие методы. Следует сказать, что операции дифференцирования и интегрирования являются также линейными.

Напротив, анализ и синтез нелинейных систем сильно затруднен, так как отсутствует универсальный математический аппарат для решения и исследования нелинейных преобразований.

Так зачем же применять нелинейные системы? Для этого есть две причины:

1) Многие процессы в природе являются нелинейными и требуют для своего рассмотрения нелинейных методов. Строго говоря, все природные процессы нелинейные, но по-разному. Одни имеют слабо выраженную нелинейность, другие – сильно нелинейные.

2) Применение нелинейных управляющих устройств может придать системе полезные свойства, недостижимые в линейном случае. Пример тому – логические системы и системы с переменной структурой.

Система становится нелинейной, если хотя бы один из ее элементов является нелинейным звеном.

Как уже об этом говорилось, все реальные системы являются нелинейными. Однако во всех случаях, когда в системе допустимо рассматривать линеаризованные элементы, следует обращаться к линейным методам синтеза, как более простым, универсальным и более проработанным. Такие нелинейности называются несущественными. И только тогда, когда нелинейные свойства элементов играют существенную роль в поведении системы, то есть когда в системе есть существенные нелинейности, прибегают к теории нелинейных систем.

Вопрос о том, является ли нелинейность существенной (допустимой) или нет, решается на основе анализа работы реальной системы управления, рассчитанной линейными методами, и опыта разработчика.

Нелинейность несущественная, если система управления, рассчитанная линейными методами, работает удовлетворительно.

В дальнейшем, если не оговорено иное, будем рассматривать существенно нелинейные системы.

Теперь рассмотрим вопросы анализа и синтеза нелинейных систем. Как уже говорилось, общие методы синтеза этих систем еще не разработаны. Есть только отдельные проработки частных случаев синтеза, мы с ними ознакомимся позже. Что касается анализа, то здесь также имеется несколько общих методов, но с ограниченными возможностями.

Можно выделить следующие *методы анализа нелинейных систем*:

1) метод фазового пространства;

2) метод гармонической линеаризации (метод гармонического баланса);

3) метод функций Ляпунова;

4) методы исследования абсолютной устойчивости;

5) математическое моделирование на ЭВМ.

Задачами анализа являются, как и прежде, выявление устойчивости и качества регулирования заданной системы. Итак: *Задачей анализа нелинейной системы является выявление ее устойчивости и качества регулирования в рабочей области изменения ее переменных.*

Известно, что линейные системы могут быть представлены в виде совокупности простейших линейных блоков, которые называются звеньями. Нелинейные системы также удобно рассматривать, как соединение некоторых звеньев, в общем случае нелинейных. Но среди них могут быть и линейные звенья, описание которых нам знакомо. Такое разбиение производится на основе математического описания системы. Среди звеньев могут быть как безинерционные, или статические, описываемые функциями, так и динамические, описываемые операторами, то есть дифференциальными уравнениями.

Пример: релейная система с линейным объектом и реле.

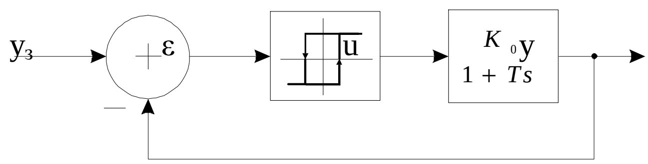


Рисунок 3.1 – Простая релейная система.

Здесь два звена: нелинейное (релейное) и апериодическое, являющееся линейным динамическим звеном.

Мы говорили о том. что дифференциальное уравнение, являющееся оператором, содержит, кроме функций над переменными, еще и производные от этих функций. Но известно, что операция дифференцирования является линейной операцией. Это обстоятельство используется для упрощения рассмотрения нелинейных процессов.

Мы знаем, что дифференциальное уравнение общего вида можно записать в форме системы

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t) \quad , \tag{3.1}$$

где $\vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t)$ – некоторая векторная функция, в общем случае нелинейная. Но функция выражает безынерционное звено.

Назовем звено, зависимость выхода которого от входа описывается функцией, безынерционным, или статическим звеном; если эта связь выражается оператором, то – динамическим звеном. Нелинейную систему зачастую можно представить, как совокупность нелинейных звеньев, и линейной динамической части.

Как уже об этом говорилось, нелинейности в системах управления и регулирования могут быть естественно присущими реальному объекту управления (трение, люфт, гистерезис, зона нечувствительности, насыщение) и зачастую вредными; влияние их в этом случае надо стремиться уменьшить. Но могут быть и специально вводимые нелинейности для придания системе желаемых свойств. Таковы, например, релейные элементы и различные нелинейные корректирующие устройства.

Таким образом, *нелинейности в системах управления могут быть естественными, присущими объекту управления и специально вводимыми для улучшения качества управления. Влияние естественных нелинейностей является вредным и его следует уменьшать*.

Среди нелинейных систем можно выделить следующие их крупные классы:

1) релейные системы. Это системы, содержащие релейные элементы;

2) Системы с естественными нелинейностями;

3) системы с переменной структурой (СПС);

4) логические системы;

5) дискретные и импульсные системы;

6) оптимальные системы.

3.2 Виды нелинейных звеньев

В зависимости от математического описания различают статические и динамические нелинейные звенья.

Безынерционное, или статическое звено может быть представлено алгебраическим или трансцендентным уравнением общего вида

$$x_1 = f(x_2), \tag{3.2}$$

где x_2 – входная переменная звена;

x_1 – выходная переменная звена;

f – линейная или нелинейная функция.

Если функция линейная, то, как известно, она записывается так

$$x_1 = a_0 + a_1 x_2, \tag{3.3}$$

где a_0 , a_1 – коэффициенты.

Функции нелинейных звеньев записываются аналитически в виде (3.2) или эти функции наглядно представляют в виде графика, где по оси абсцисс откладывают входную переменную звена, а по оси ординат – выходную. Возможна также табличная запись.

Нелинейные звенья разделяются на гладкие и негладкие. Гладкие описываются гладкими функциями.

Пример гладкой нелинейности представлен на рисунке 3.2

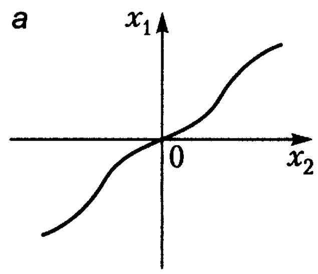


Рисунок 3.2 – Гладкая нелинейная функция

Существует большое разнообразие негладких нелинейных звеньев.

Наибольшее применение имеют следующие статические нелинейные звенья: 1) с насыщением, 2) с зоной нечувствительности, 3) с зоной нечувствительности и насыщением, 4) релейное звено, 5) релейное звено с зоной нечувствительности. Эти звенья имеют следующие характеристики (по горизонтальной оси входное воздействие x_1, по вертикальной – выход звена x_2):

а) Звено с насыщением

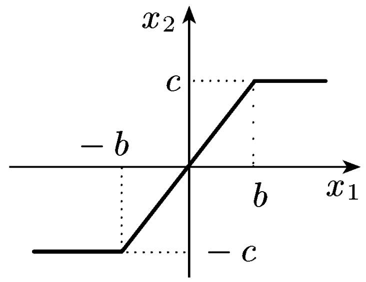


Рисунок 3.7 – Звено с насыщением

б) Звено с зоной нечувствительности

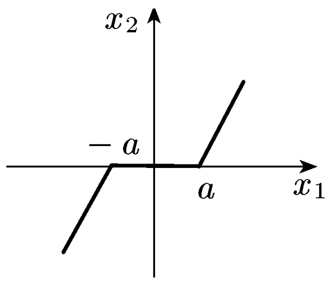


Рисунок 3.7 – Звено с зоной нечувствительности

в) Звено с зоной нечувствительности и насыщением

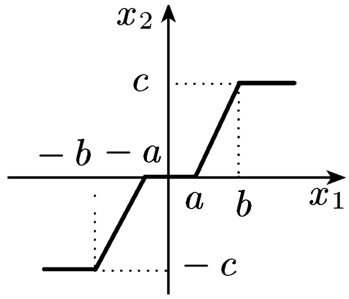


Рисунок 3.7 – Звено с зоной нечувствительности и насыщением

г) Релейное звено

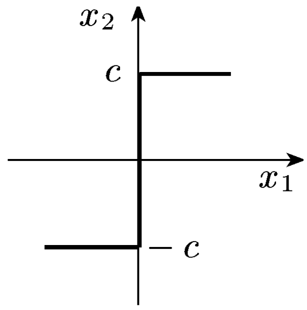


Рисунок 3.8 – Релейное звено

д) релейное звено с зоной нечувствительности

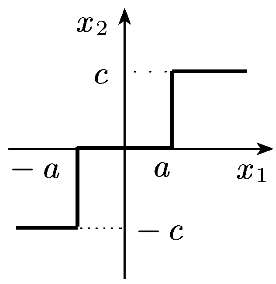


Рисунок 3.9 – Релейное звено с зоной нечувствительности

Нелинейные звенья часто имеют участки неоднозначных характеристик, среди них наиболее распространены гистерезис и люфт. Эти участки придают звеньям динамические свойства. Примеры таких звеньев:

е) релейное звено с гистерезисом (рис. 3.10). Стрелки на вертикальных линиях означают возможное направление изменения переменной во времени. Такую характеристику имеют электромагнитное и другие реле. Часто являются элементами алгоритма управления.

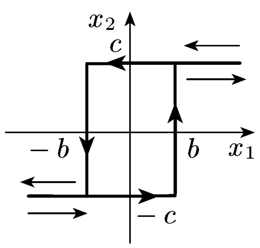


Рисунок 3.10 – Релейное звено с гистерезисом

ж) релейное звено с зоной нечувствительности и гистерезисом.

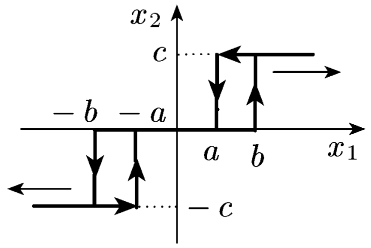


Рисунок 3.11 – Релейное звено с нечувствительности и гистерезисом

з) кусочно-линейное звено с люфтом. Типичный пример – шестеренчатая передача, когда x_1 – движение ведущей шестерни, x_2 – движение ведомой. При движении ведущей шестерни в одном направлении зависимость между ведущей и ведомой линейная, при движении в обратом направлении сначала выбирается люфт, что соответствует горизонтальному участку характеристики, затем восстанавливается линейная зависимость.

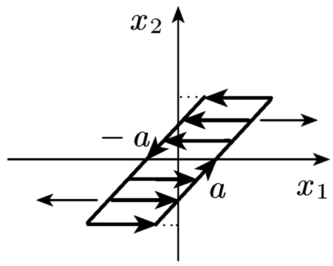


Рисунок 3.11 – Линейное звено с люфтом

Применяются и другие характеристики.

Напомним, что эти звенья и участки могут быть характеристиками объекта управления или они могут входить в состав регулятора. В последнем случае, если используется микропроцессорный цифровой регулятор, то программным путем можно реализовать любую характеристику.

3.3 Соединения нелинейных звеньев

Так же, как линейные, нелинейные статические и динамические звенья можно соединять последовательно, параллельно и обратной связью. Схемы таких соединений для двух звеньев показаны на рисунке 3.9.

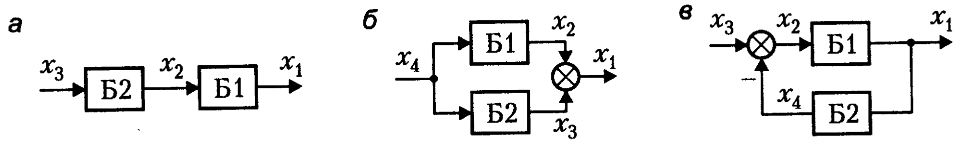


Рисунок 3.9 – Соединения звеньев: а – последовательное; б – параллельное; в – с обратной связью

В результате каждого из таких соединений получается эквивалентное звено. Но его характеристику найти значительно сложнее, чем для линейных звеньев.

Рассмотрим это более подробно для статических звеньев. Допустим, что мы имеем два в общем случае нелинейных статических звена. Характеристика одного звена выражается функцией

$$x_1 = f_1(x_2), \tag{3.4}$$

характеристика другого звена

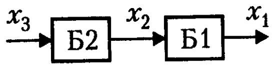
$$x_1 = f_2(x_2), \tag{3.5}$$

где x_2 – входная переменная, x_1 – выходная переменная.

Нам нужно найти характеристику звена $x_1 = f_3(x_{вх})$, эквивалентную последовательному, параллельному соединению и соединению обратной связью исходных звеньев.

3.2.1 Последовательное соединение.

Последовательное соединение имеет вид (см. рисунок)



где Б1имеет характеристику $f_1(x_2)$, Б2 – $f_2(x_3)$.

С учетом (3.4),(3.5) для такого соединения имеем

$$x_1 = f_1(x_2), \tag{3.6}$$

$$x_2 = f_2(x_3), \tag{3.7}$$

или, подставляя (3.7) в (3.6), получаем

$$x_1 = f_1(f_2(x_3)) = f_3(x_3). \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует, что, если при заданном $f_1(x_2)$ будет $f_2(x_3) = f_1^{-1}(x_3)$, то $x_1 = f_1(f_1^{-1}(x_3)) = x_3$, то есть $x_1 = x_3$.

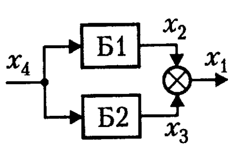
Это один из способов компенсировать нелинейность – последовательно с данным нелинейным звеном включаем нелинейность с характеристикой, обратной к данной нелинейности.

Например, если $x_1 = f_1(x_2) = x_2^2$ то, выбирая $x_2 = f_2(x_3) = \sqrt{x_3}$, получаем $x_1 = \left(\sqrt{x_3}\right)^2 = x_3$.

Итак: *Для компенсации данной нелинейности последовательно с ней включаем нелинейность, обратную к данной нелинейности.*

3.2.2 Параллельное соединение.

Параллельное соединение имеет вид



Для этого соединения имеем

$$x_4 = x_2 + x_3.$$

Запишем

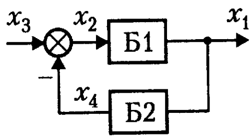
$$x_2 = f_1(x_4),$$

$$x_3 = f_2(x_4).$$

Тогда

$$x_4 = f_1(x_4) + f_2(x_4). \tag{3.9}$$

3.2.3 Соединение обратной связью. Схема имеет вид



Для этого соединения

$$x_2 = x_3 - x_4\ , \tag{3.10}$$

$$x_1 = f_1(x_2), \tag{3.11}$$

$$x_4 = f_2(x_1). \tag{3.12}$$

Подставляя (3.12) в (3.10), получаем

$$x_2 = x_3 - f_2(x_1). \tag{3.13}$$

Подставляя (3.13) в (3.11), находим

$$x_1 = f_1(x_3 - f_2(x_1)). \tag{3.14}$$

Как видно, здесь представлена связь выходной переменной x_1 с входной x_3 неявно.

Явное выражение $x_1 = f_3(x_3)$ может быть найдено для частных случаев конкретного задания f_1 и f_2. Поиск может быть облегчен, если взять от правой и левой части (3.14) функцию, обратную f_1. Тогда

$$f_1^{-1}(x_1) = x_3 - f_2(x_1), \text{ или } x_3 = f_1^{-1}(x_1) + f_2(x_1). \tag{3.15}$$

Из (3.15) можно попытаться найти явное выражение для x_1.

<u>Пример3.1</u>

Зададим f_1 в виде

$$x_1 = kx_2,$$

то есть f_1 является пропорциональным звеном. Тогда, решая последнее уравнение относительно x_2, получаем $x_2 = x_1 / k$, то есть

$$f_1^{-1}(x_1) = x_1 / k$$

поставив это f_1 в (3.15), получаем

$$x_3 = x_1 / k + f_2(x_1).$$

при $k \to \infty$ последнее выражение принимает вид

$$x_3 = f_2(x_1).$$

Следовательно

$$x_1 = f_2^{-1}(x_3). \tag{3.16}$$

Из (3.16) следует правило: *Подключение нелинейного звена в отрицательную обратную связь пропорционального звена с большим коэффициентом усиления позволяет получить обратную функцию этого нелинейного звена.*